"Θεμελ. Εν Μαθηματικών" No. Date 11/12/18

Πρόταση

(i) $\forall x,y \in \mathbb{N}$ ισχύει $x+y \in \mathbb{N}$
(ii) $\forall x,y \in \mathbb{N}$ ισχύει $xy \in \mathbb{N}$
(iii) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^+$
(iv) $\min \mathbb{N} = 1$
(v) $0 \notin \mathbb{N}$
(vi) Αν $n \in \mathbb{N}$ με $n > 1$ τότε $n-1 \in \mathbb{N}$
(vii) Αν $n,m \in \mathbb{N}$ με $n > m$ τότε $n-m \in \mathbb{N}$

Απόδειξη

(i) Έστω $x \in \mathbb{N}$
Θέτουμε
$A_x = \{z \in \mathbb{N} : x+z \in \mathbb{N}\}$

Ισχυρισμός: Το A_x είναι επαγωγικό σύνολο.

Αποδ:
a) Εφόσον $x \in \mathbb{N}$ και το $\mathbb{N}$ είναι επαγωγικό έχουμε $x+1 \in \mathbb{N}$
άρα $1 \in A_x$

β) Αν $z \in A_x$ τότε $x+z \in \mathbb{N}$
άρα $(x+z)+1 \in \mathbb{N}$ άρα $x+(z+1) \in \mathbb{N}$
δηλ. $z+1 \in A_x$

Εφόσον το A_x είναι επαγωγικό θα ισχύει $\mathbb{N} \subseteq A_x$
άρα $\forall y \in \mathbb{N}$ έχουμε $y \in \mathbb{N}$ άρα $x+y \in \mathbb{N}$.

(ii) Έστω $x \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $B_x = \{z \in \mathbb{N} \quad x \cdot z \in \mathbb{N}\}$

Αποδεικνύουμε (όπως πριν) ότι B_x είναι επαγωγικό.
Συμπέρασμα ... $\mathbb{N} \subseteq B_x$ άρα $\forall y \in \mathbb{N}$ ισχύει $y \in B_x$ άρα $xy \in \mathbb{N}$

(iii) Προκύπτει από το γεγονός ότι το $\mathbb{R}^+$ είναι επαγωγικό

(iv) Θέτουμε $A=\{x\in\mathbb{R},\ x\geq 1\} = [1,+\infty)$

Το A αποδεικνύεται ότι είναι επαγωγικό άρα $\mathbb{N}\subseteq A$ δηλ. $n\geq 1\ \forall n\in\mathbb{N}$. Επίσης $1\in\mathbb{N}$ συμπεραίνουμε ότι $\min\mathbb{N}=1$

(v) Επίσης $0<1$ και $\min\mathbb{N}=1$ προκύπτει ότι $0\notin\mathbb{N}$.

(vi) Θέτουμε $S'=\{1\}\cup\{n\in\mathbb{N},\ n-1\in\mathbb{N}\}$

Αποδεικνύεται ότι το S είναι επαγωγικό. Άρα $\mathbb{N}\subseteq S$
Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ με $n>1$ από τον ορισμό του S θα ισχύει $n-1\in\mathbb{N}$.

(vii) Θέτουμε
$A=\{m\in\mathbb{N}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ με $n>m$ ισχύει $n-m\in\mathbb{N}$

Αποδεικνύεται ότι το A είναι επαγωγικό.

($1\in A$ από το (vi))

Άρα προκύπτει ότι $\mathbb{N}\subseteq A$ και προκύπτει το συμπέρασμα

<u>Πρόταση</u>

$\forall n\in\mathbb{N}$ δεν υπάρχει φυσικός αριθμός x με $n<x<n+1$

Αποδ

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και $x \in \mathbb{N}$ με $n < x < n+1$
Τότε $x - n \in \mathbb{N}$ (από το (vii) της προηγ. πρότασης)
και $x - n < 1$
Άτοπο διότι $1 = \min \mathbb{N}$.

Παρατήρηση: Η τελευταία πρόταση λέει ότι για $\forall n \in \mathbb{N}$ τα $n, n+1$ είναι διάταξη [illegible] του $\mathbb{N}$

Ορισμός - Συμβολισμός

$2 = 1+1$
$3 = 2+1$
$4 = 3+1$
$5 = 4+1$
$6 = 5+1$
$7 = 6+1$
$8 = 7+1$
$9 = 8+1$
$10 = 9+1$

Για $1 \leq \alpha \leq 9$, $\alpha \in \mathbb{N}$
και $\beta \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
ο διψήφιος αριθμός
$\alpha\beta = 10 \cdot \alpha + \beta$
Ομοίως οι τριψήφιοι
$\alpha\beta\gamma = \alpha \cdot 10^2 + \beta \cdot 10 + \gamma$

Πρόταση: Το σύνολο $\mathbb{N}$ (με τη διάταξη που επάγεται από το $\mathbb{R}$) είναι καλά διατεταγμένο σύνολο (δηλ. για κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο)

Αποδ (περιγραφή)

Έστω $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$. Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο
Θέτουμε $B = \{x \in \mathbb{N} \ \ x$ κάτω φράγμα του $A\}$. Αποδεικνύεται ότι

το B είναι επαγωγικό. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι $\mathbb{N} \subseteq B$
άρα κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι κάτω φράγμα του A. Για τυχαίο
$\alpha \in A$ προκύπτει ότι $n \leq \alpha$ $\forall n \in \mathbb{N}$ άτοπο.
(διότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο)

Η επαγωγή ως αποδεικτική μέθοδος:

Πρ

Αν $P(\cdot)$ είναι προτασιακός τύπος με σύνολο αναφοράς το $\mathbb{N}$ ώστε
α) $P(1)$ αληθής
β) $\forall x \in \mathbb{N}$ αν η $P(x)$ είναι αληθής τότε η $P(x+1)$ είναι αληθής τότε $P(x)$ είναι αληθής $\forall x \in \mathbb{N}$

[Απ. το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{N}$, η $P(x)$ αληθής$\}$ είναι επαγωγικό]

Πρ Αν $P(\ )$ προτασιακός τύπος με σύνολο αναφοράς το $\mathbb{N}$ ώστε $\forall x \in \mathbb{N}$
(*) Αν η $P(n)$ είναι αληθής $\forall\, n < x$ τότε η $P(x)$ είναι αληθής.
Τότε η $P(x)$ είναι αληθής $\forall n \in \mathbb{N}$.
Απ Θεωρούμε το σύνολο
$A = \{x \in \mathbb{N}$, η $P(x)$ δεν είναι αληθής$\}$

Αν $A \neq \emptyset$, τότε το A έχει ελάχιστο στοιχείο.
Θέτουμε $x = \min A$
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n < x$ ισχύει $n \notin A$ άρα η $P(x)$ αληθής.
Από την (*) η $P(x)$ είναι αληθής δηλ. $x \notin A$ άτοπο
επομένως $A = \emptyset$
δηλ. $P(x)$ είναι αληθής $\forall x \in \mathbb{N}$

Η επαγωγή μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε ορισμούς. Σε αυτή την περίπτωση ονομάζεται αναδρομή.

Αναδρομικοί Ορισμοί

1) Για $a \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $a^1 = a$

$a^{n+1} = a^n \cdot a \quad \forall n \in \mathbb{N}$

έτσι έχει οριστεί το a^n $\forall n \in \mathbb{N}$

(επίσης για $a \neq 0$ ορίζουμε $a^0 = 1$)

2) Θέτουμε $1! = 1$

$(n+1)! = n!(n+1)$

(έτσι έχει οριστεί το $n!$ $\forall n \in \mathbb{N}$).

επίσης ορίζεται $0! = 1$

3) Αν $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών.

$$\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

[Μπορούμε να συμβολίσουμε $\sum_{i=1}^{n} a_i$ ή $\sum_{m=1}^{k} a_m$]

Ομοίως ορίζεται $\sum_{k=0}^{n} a_k$. Επίσης $\sum_{k=-n}^{n} a_k$

επίσης $\sum_{k=m}^{n} a_k$ όπου m, n φυσικοί με $m \leq n$

Αν $n \in \mathbb{N}$ και $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ με $0 \leq k \leq n$

ορίζουμε $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$n(n-1) = \quad (n-k+1)$

Λήμμα Αν $n \in \mathbb{N}$ και $k \in \mathbb{N}$ $1 \leq k \leq n$ τότε

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Απόδ $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} =$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} =$$

$$= \frac{n!\,(n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!} + \frac{n!\,k}{k!\,(n-k+1)!} =$$

$$= \frac{n!\,(n-k+1+k)}{k!\,((n+1)-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,((n+1)-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

Τρίγωνο του Pascal

$(\alpha+\beta)^0 = 1$

$(\alpha+\beta)^1 = 1\alpha + 1\beta$

$(\alpha+\beta)^2 = 1\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

$(\alpha+\beta)^3 = 1\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + 1\beta^3$

<u>Θεώρημα</u> (διωνυμικό ανάπτυγμα)

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$$(\alpha+\beta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \beta^k.$$

<u>Απόδειξη</u> (Με επαγωγή)

<u>Για $n=1$</u>

$(\alpha+\beta)^1 = \alpha + \beta$

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} \alpha^{1-k} \cdot \beta^k = \binom{1}{0} \alpha^1 \beta^0 + \binom{1}{1} \alpha^0 \beta^1 =$$

$= \alpha + \beta.$

Υποθέτουμε ότι $(\alpha+\beta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \beta^k$

Τότε $(\alpha+\beta)^{n+1} = (\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^n = (\alpha+\beta)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \beta^k\right) =$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k+1} \beta^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \beta^{k+1} =$$

$\lambda = k+1 \to k = \lambda - 1$ κάνω αλλαγή μεταβλητής

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{(n+1)-k} \cdot \beta^k + \sum_{\lambda=1}^{n+1} \binom{n}{\lambda-1} \alpha^{n-\lambda+1} \cdot \beta^\lambda =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{\alpha^{(n+1)-k} \beta^k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \underbrace{\alpha^{n+1-k} \beta^k}.$$

αλλάζω το γράμμα λ με το k

$$= \alpha^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{(n+1)-k}\beta^{k} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}\alpha^{(n+1)-k}\beta^{k} + \beta^{n}$$

$$= \alpha^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)\alpha^{(n+1)-k}\beta^{k} + \beta^{n+1}$$

$$= \alpha^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}\alpha^{(n+1)-k}\beta^{k} + \beta^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\alpha^{(n+1)-k}\cdot\beta^{k}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}\beta^{k} = \binom{n}{0}\overset{1}{\cancel{\alpha^{n-0}}}\,\overset{1}{\cancel{\beta^{0}}} \text{ και}$$

Άσκηση

συνεχίζει μέχρι $\binom{n}{n}$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n} = 2^{n}$$

(Εφαρμόζοντας το διώνυμο ανάπτυγμα για $\alpha=1, \beta=1$)

Για $n\geq 1$

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\dots+(-1)^{n}\binom{n}{n} =$$

$$= (1+(-1))^{n} = 0^{n} = 0$$

No. Date

Φυλλάδιο #5

A1

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = 5x - 17$
$f: 1-1$
$f(x) = f(y) \Rightarrow 5x - 17 = 5y - 17 \Rightarrow 5x = 5y$
$x = y$

f επί
Έστω $y \in \mathbb{R}$ αναζητούμε $x \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = y$
$\Leftrightarrow 5x - 17 = y$

$\Leftrightarrow x = \frac{y+17}{5}$

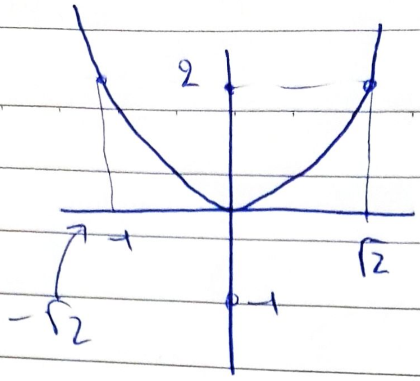
Άρα η f είναι επί.

Από τα προηγούμενα
$f^{-1}(y) = \frac{y+17}{5} \quad \forall y \in \mathbb{R}$

A2 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$
$A = (-1, 2]$
Να υπολογιστούν: $f(A)$, $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(f(A))$, $f(f^{-1}(A))$

$A = (-1, 0] \cup [0, 2]$
η f είναι γν. φθ. κ συνεχής στο $(-1, 0]$
άρα $f((-1, 0]) = [0, 1)$
$f([0, 2]) = [0, 4]$
$f(A) = f((-1, 0] \cup [0, 2]) = f((-1, 0]) \cup f([0, 2]) =$
$= [0, 1) \cup [0, 4] = [0, 4]$

No. Date



$x \in f^{-1}(A)$

$\Leftrightarrow f(x) \in A \Leftrightarrow x^2 \in A \Leftrightarrow -1 \le x^2 \le 2$

(Επειδή $x^2 \ge 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow x^2 \le 2 \Leftrightarrow x^2 - 2 \le 0$

$(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \le 0$

$x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

$f^{-1}(A) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

$f(f^{-1}(A)) = f([-\sqrt{2}, \sqrt{2}]) = f([-\sqrt{2}, 0] \cup [0, \sqrt{2}]) =$

$= f([-\sqrt{2}, 0]) \cup f([0, \sqrt{2}]) = [0, 2] \cup [0, 2] = [0, 2]$

$f(A) = [0, 4]$

$x \in f^{-1}(f(A)) \Leftrightarrow f(x) \in f(A)$

$\Leftrightarrow x^2 \in [0, 4]$

$\Leftrightarrow 0 \le x^2 \le 4 \Leftrightarrow -2 \le x \le 2 \Leftrightarrow x \in [-2, 2]$